

# ZOLTAN PAUL DIENES UN MATEMÁTICO INCONFORME

**Germán Hincapié Navarrete**  
*Profesor Escuela Aeronáutica de Colombia*

*Bogotá D.C., Colombia*

**Hortensia Riaño Camelo**  
*Psicóloga Universidad de la Sabana*  
*Educativa y de Familia*  
*Bogotá D.C., Colombia*

## 1. Introducción

El Dr. Zoltan Paul Dienes es Famoso mundialmente por su teoría incansable de practicar un modelo matemático o una aproximación al aprendizaje matemático con el manejo de juegos, sonidos y bailes, haciéndolo más atractivo a los niños.

Poseedor de muchos títulos, y grados de honor el Dr. Dienes ha tenido una gran y fructífera carrera rompiendo esquemas y ganando simpatizantes con sus revolucionarias ideas de aprender el concepto de la matemática compleja, con tal diversión que los niños están frecuentemente atentos a aprender lo que se les comunica.

Un concepto académico profundo y poco convencional fue llevado a los niños de Hungría, Francia, Alemania, Gran Bretaña. Su carrera académica, sus éxitos, fracasos, sus asuntos personales, sus ocasionales tristezas, sus conmovedores y divertidos y siempre fascinantes relatos, están consignados en su autobiografía compartiendo su inteligencia, su espíritu, su sentido humano.

Nació en 1916, se le ha comparado con Jean Piaget, Jerome Bruner, Edgard Begle y Robert Davis como una legendaria figura cuyo trabajo deja una gran impresión sobre el campo de la educación matemática. Inicialmente el nombre de Dienes se asocia con bloques lógicos, material algebraico, franjas matemáticas entre otras. Es un personaje único en el campo de la educación matemática no solo por sus teorías de cómo las estructuras matemáticas pueden ser una efectiva enseñanza desde los tempranos años del conocimiento, usando juegos manipulativos sino también por su incansable atención durante más de 50 años de prácticas escolares a través de su trabajo de campo en el Reino Unido, Italia, Austria, Brasil, Canadá, Papua Nueva Guinea y los Estados Unidos: Sus teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas han influenciado a muchas generaciones en educación matemática particularmente aquellos que trabajan con números racionales, proyectos matemáticos y mas recientemente con modelos y el área de investigación.

Dienes es un defensor del trabajo de grupo con materiales concretos para desarrollar los conceptos matemáticos de una forma más agradable. Una de las cosas que nos ayudará a enseñar matemáticas es comprender el cómo aprenden nuestros alumnos. Sin embargo ésta no es tarea fácil, ya que, el aprendizaje y el pensamiento son actividades mentales complejas; además sabemos que cada estudiante es diferente de los demás. La forma en que cada estudiante aprende, piensa y responde es única. Asociado a todo lo anterior, no sabemos cuales son sus preocupaciones, sus sentimientos y sus emociones, y más aún, desconocemos el nivel de su capacidad matemática. No obstante, algunos psicólogos han establecido ciertos “principios de aprendizaje” que probablemente podemos aplicar al planear actividades para nuestros alumnos. El aprendizaje de la matemática ha sido estudiado por varios psicólogos reconocidos, uno de los más

connotados es el Suizo Jean Piaget. El visualiza el aprendizaje como un proceso de evolución, asociado a la madurez. Los niños pequeños aprenden por la interacción con objetos concretos. En la medida en que el niño va creciendo, va cambiando de operaciones concretas a representaciones visuales, alcanzando el pensamiento abstracto alrededor de los 10 a 12 años de edad. De manera similar, Zoltan p. Dienes, un educador inglés y Bruner, psicólogo norteamericano, describen el aprendizaje, iniciándose con la manipulación de objetos físicos, continuando con un estado gráfico antes de alcanzar el estado analítico abstracto. Nótese que todos están de acuerdo en que el aprendizaje principia con lo concreto y que el proceso hacia lo abstracto depende del nivel de madurez y comprensión de los niños. Estas ideas acerca del aprendizaje, sugieren que nosotros usemos la siguiente secuencia de aprendizaje en la enseñanza de conceptos matemáticos:

1. Usar objetos que den una representación física del concepto (las franjas de Dienes son objetos con los cuales al manipularlos se logran conceptos matemáticos). Aprendemos mejor aquellas cosas que hacemos, que tocamos, que movemos, que vemos o que oímos. Estas son experiencias que un libro no puede proporcionar. Necesitamos hacer esto con nuestros alumnos para introducir los conceptos que se exponen en el libro de texto.
2. Usar dibujos hechos en clase o bien gráficas que representen el concepto a ser enseñado. Por supuesto se pueden utilizar fotografías o dibujos del libro de texto, pero algunas veces esas gráficas son engañosas para el estudiante medio. Construir paso a paso un concepto con las franjas en el escritorio suele ser mejor que usar las que se encuentren en el libro de texto.
3. Con las franjas, se relaciona el concepto de un modelo matemático, tal como el concepto de grupo, o de vector para que encaje en el contexto del concepto. Una parte crucial del proceso de aprendizaje es la transferencia de representaciones físicas a símbolos abstractos. La clave de esta transferencia es el entendimiento del concepto implicado ( sea este una operación, una relación o un algoritmo).
4. Luego de que los alumnos entiendan el concepto, podremos usar símbolos para representar variables, operaciones y relaciones tales como  $ax + by = X$ . Estos símbolos tendrán un gran significado si previamente los estudiantes conocieron, manejaron y contestaron ejercicios, antes de transcribirlos o de identificarlos de manera impresa en el libro de texto. Una vez más, es crucial que el alumno entienda la operación o algoritmo representados por los símbolos.

Ahora, los alumnos estarán listos para practicar o aplicar conceptos matemáticos con operaciones o relaciones. Es esta práctica la que ayuda a memorizar, facilita la comprensión y permite la aplicación de conceptos; es la ocasión de usar una variedad de actividades prácticas, tales como: Juegos, acertijos y problemas. Después de que los alumnos han dominado el concepto, memorizado ciertos hechos y manipulado operaciones correctamente, es tiempo de generalizar las propiedades o de probar teoremas.

El pensamiento abstracto, el pensamiento lógico, la transferencia a nuevas situaciones, el usar el concepto para descubrir uno nuevo, son el máximo nivel alcanzable del proceso de aprendizaje.

La práctica es más útil cuando el estudiante encuentra resultados para algo que a él le guste hacer. Es por eso que los juegos, o aplicaciones a problemas reales son preferibles a los ejercicios

que presenta el libro de texto. En un juego los alumnos quieren ser precisos y rápidos a fin de ganar, en un juego, las respuestas incorrectas se pueden utilizar para corregir errores y reforzar estrategias para obtener respuestas correctas.

Es lógico que cuando los estudiantes utilizan procesos para llegar a un concepto, ellos lo recordarán durante más tiempo y lo utilizan para aprender nuevas teorías. Cuando los estudiantes le tomen gusto a la práctica, ellos gozarán el aprendizaje de la matemática y, por supuesto, nosotros gozaremos más aún de enseñarla.

Si al maestro le gusta enseñar, al alumno le gusta aprender y viceversa.

Un gran acuerdo en matemáticas es involucrar ciclos que de alguna manera se repiten de forma indefinida. Sin considerar estos ciclos superpuestos sino a manera de espiral, Un ciclo puede ser superpuesto sobre algún ciclo simple iniciándolo en otra posición y así poder tener dos, tres, cuatro o más de los mismos ciclos corriendo al mismo tiempo pero en fases diferentes.

Observe los números naturales, enteros, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas, entre otras. Para éste trabajo de franjas matemáticas, se pueden utilizar elementos como figuras,



letras, números, o colores etc. Las actividades se inician con franjas de 2, 3, 4, 5 o mas colores, se sugiere primero construir una tabla de operaciones entre colores.

El trabajo a realizar durante este cursillo tiene como objetivo brindar las herramientas pedagógicas y el enfoque interpretativo “matemático” que desencadena el manejo de las Franjas de Dienes. Este material llamativo, no solo por sus colores y la elaboración del mismo, por parte de los participantes, sean adultos o niños, sino por lo que se va descubriendo poco a poco hace que el tiempo sea poco cuando de construir, interpretar y jugar se trata. Jugar a la matemática sin números es divertido cuando el resultado que se va obteniendo es la edificación de casas a través de la lógica, secuencias y combinación de colores para llegar a conceptos base de procesos aritméticos, lógicos, de cálculo, algebraicos, geométricos, etc. La visión pedagógica que Dienes presenta en su autobiografía de “hacer más activa la clase de matemática”; es tan factible, como la creación de cuentos y juegos por parte del niño. Se puede aprender matemáticas sin números, y es el estudiante quien marca la pauta para avanzar hasta donde él y su curiosidad le van permitiendo.

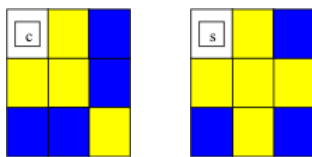
“DISFRUTA LA MATEMATICA SIN NUMEROS, LETRAS, FORMULAS O ECUACIONES”

## 2. Manejando dos franjas

### 2.1. Dos franjas - usando dos colores Amarillo (A), Azul (Z)

2.1.1 Regla (c)  $AcA = A$ ;  $AcZ = ZcA = Z$ ;  $ZcZ = A$

Regla (s)  $AsZ = A$ ;  $ZsZ = Z$



**2.1.2** Construya una franja con tantos cuadros como sea posible de acuerdo a la regla “c” iniciando con dos cuadros no ambos amarillos como se muestra en la franja de abajo, puede ser de 10 cuadros de largo, en algún momento se repite esta secuencia. **2.1.3** Arreglo de dos franjas:



Ubique dos franjas de forma paralela deslizando la segunda un cuadro a la derecha, el arreglo de estas franjas, origina casas de dos pisos (vectores) los cuales se pueden identificar mediante una regla y/o un arreglo matricial



**2.1.4** Regla para construir la casa siguiente:

Segundo piso = segundo piso “c” primer piso

Primer piso = segundo piso anterior.

**2.1.5** Arreglo con matrices: también se puede construir la casa siguiente haciendo operaciones con matrices así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{La casa que deseamos construir } [X, Y] \text{ a partir de una casa presente}$$

$[x, y]$ , se logra con la operación de la matriz generadora por los pisos  $x, y$  de la casa presente.

Parejas logradas  $V = \{(Z, A), (Z, Z)(A, Z), (A, A)\}$  para un rápido manejo se pueden codificar los colores  $A = 0$  y  $Z = 1$  de manera que resulta el conjunto como:  $\{(1, 0), (1, 1) (0, 1), (0, 0)\}$

**2.1.6** Ejercicio: Corra la segunda franja dos cuadros a la derecha y determine el arreglo que se forma para construir las casas (vectores).



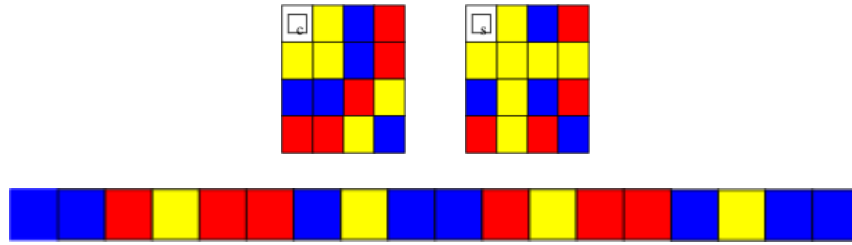
## 2.2. Dos franjas - usando tres colores Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R)

**2.2.1** Regla ( c )  $AcA = A$ ;  $AcZ = ZcA = Z$ ;  $AcR = RcA = R$ ;  $ZcZ = R$ ;

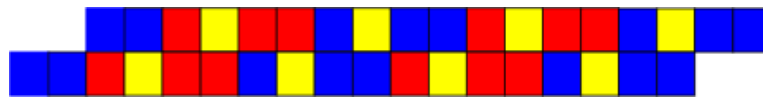
$RcR = Z$ ;  $RcZ = ZcR = A$

Regla(s) Regla de cambio  $s(A) = A$ ;  $s(Z) = R$ ;  $s(R) = Z$

**2.2.2** Construcción de una franja: se inicia con dos cuadros, no ambos amarillos para luego colocar el siguiente usando la regla “c”y continuar haciendo las operaciones de tantos cuadros como sea posible así:



**2.2.3** Arreglo de las 2 franjas; Ubique dos franjas de manera paralela deslizando la segunda dos cuadros a la izquierda, con éste arreglo se originan casas de dos pisos ( se desprecian las colas que se forman a los extremos) estas casas establecen reglas y/o un arreglo matricial como:



**2.2.4** Regla para construir los pisos de la casa siguiente: recuerde la regla “s”

Segundo piso = s (piso 2 ) “c” piso 1

Primer piso = s ( piso 2 ) “c”s (piso 1)

**2.2.5** Arreglo con la ecuación:  $\begin{bmatrix} s & 1 \\ s & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  La casa que se desea construir  $[X, Y]$ , se logra operando la matriz generadora con la casa presente  $[x, y]$ .  $x$  = segundo piso,  $y$  = primer piso. Maneje la regla y la matriz y compruebe.

Cuando se encuentra la serie o familia de casas se dice que se tiene una villa, ¿Cuántas casas diferentes forman la villa?

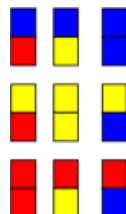
**2.2.6** Parejas logradas:  $\{(Z, R), (Z, A), (R, R), (A, R), (R, Z), (R, A), (Z, Z), (A, Z), (A, A)\}$  se puede hacer un arreglo numérico con la convención de  $A = 0, Z = 1, R = 2$  así:  $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2), (0, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0)\}$ .

**2.2.7** Ejercicio: Corra la segunda franja un cuadro a la derecha de la primera y establezca las reglas y la matriz para construir las casas posteriores.

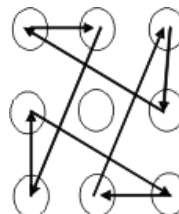


Compare esta matriz con las reglas que forman las casas  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

**2.2.8** ARMANDO UNA VILLA



CONSTRUYENDO UN CAMINO



Observando la presentación de las casas arriba, se han combinado seis colores amarillos, seis azules y seis rojos formando con estas una pequeña villa.

Interpretando la secuencia sobre las franjas se traza un camino pasando de casa en casa, el camino sigue cuidadosamente la regla, el camino visita todas las casas a excepción de la casa totalmente amarilla.

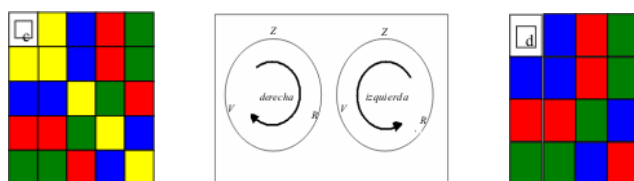
**2.2.9** deslice la segunda franja una casilla a la izquierda de la franja superior, establezca las reglas correspondientes en este caso, presente la villa y trace el camino que le corresponde, se puede decir que este camino es una relación inversa del primer camino.

Puede ser posible mover la franja de abajo dos o tres cuadros a la derecha y construir sus respectivos caminos, luego dos o tres cuadros a la izquierda y encontrar el camino correspondiente, confrontar las relaciones inversas, se pueden hacer veinte diferentes caminos, si es curioso compruébelo usted.

### 2.3. Dos franjas - usando cuatro colores Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R) Verde (V)

**2.3.1** Regla (c)  $AcA = A$ ;  $AcZ = Z$ ;  $AcR = R$ ;  $AcV = V$ ;  $ZcR = V$ ;  $ZcV = R$ ;  $RcV = Z$ ;  $ZcZ = A$ ;  $RcR = A$ ;  $VcV = A$

Reglas de cambio “s”:  $dA = A$ ;  $dZ = R$ ;  $dR = V$ ;  $dV = Z$ ;  $iA = A$ ;  $iZ = V$ ;  $iV = R$ ;  $iR = Z$ .



Ciclo derecho ciclo izquierdo

**2.3.2** Arreglo de un franja: Se inicia con dos cuadros uno de ellos no amarillo, estableciendo la siguiente regla:

Giro a la derecha del primer color combinado con el segundo color da el tercer color.

$d1^\circ$  “c”  $2^\circ = 3^\circ$  ejemplo  $dZ$  “c”  $R = A$ ,  $dR$  “c”  $A = V$ ,  $dV$  “c”  $V = R$ .



**2.3.3** Ubique dos franjas paralelas y deslice la segunda dos cuadros a la derecha, así:



**2.3.4** El ordenamiento de estas franjas determina casas de manera que para la siguiente se construyen los pisos con las siguientes reglas:

a) segundo piso =  $i(\text{piso } 2)$  “c”  $i(\text{piso } 1)$

b) primer piso = piso 2 “ $c$ ”  $d$ (piso 1)

**2.3.5** La ecuación  $\begin{bmatrix} i & i \\ 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  se presenta como las ecuaciones

$$ix + iy = X$$

$$1x + dy = Y$$

donde 1 es el elemento unidad que no altera el color.

**2.3.6** Ejemplo: Con la cuarta casa  $[R, V]$  se construye  $\begin{bmatrix} i & i \\ 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  las ecuaciones

$$iR “c” iV = V$$

$$R “c” dV = V$$

Observe que el vector o quinta casa resultante es  $[V, V]$

Practicar éstas operaciones y confrontar el resultado en las 15 casas que se presentan en las franjas.

**2.3.7** Las parejas se forman

$$\{(A, Z), (V, R), (V, A), (R, V), (V, V), (A, R), (Z, V), (Z, A), (V, Z), (Z, Z), (A, V), (R, Z), \\ (R, A), (Z, R), (R, R), (A, A)\}$$

Se puede arreglar con números par una fácil presentación y se tiene como resultado:

$$\{(0, 1), (3, 2), (3, 0), (2, 3), (3, 3), (0, 2), (1, 3), (1, 0), (3, 1), (1, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 0), (1, 2), \\ (2, 2), (0, 0)\}$$

**2.4. Dos franjas - usando cinco colores u objetos Amarillo ( $A$ ), Azul ( $Z$ ), Rojo ( $R$ ), Verde ( $V$ ), Fucsia ( $F$ ).**

Se pueden también usar los nombres de los dedos de la mano (meñique, anular, corazón, índice, pulgar)

**2.4.1** Regla (  $c$  )

$$\begin{aligned} AcA = A; \quad AcZ = Z; \quad AcR = R; \quad AcV = V; \quad AcF = F \\ ZcZ = R; \quad ZcR = V; \quad ZcV = F; \quad AcF = A; \quad RcZ = V; \quad RcR = F; \\ RcV = A; \quad RcF = Z; \quad VcZ = F; \quad VcR = A; \quad VcV = Z; \\ VcF = R; \quad FcZ = A; \quad FcR = Z; \quad FcV = R; \quad FcF = V. \end{aligned}$$

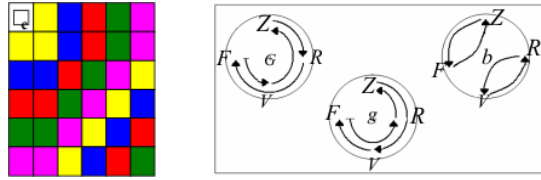
Reglas “swap”

$$G(A) = A \quad \text{Giro} \quad Z \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow V \rightarrow Z$$

$$g(A) = A \quad \text{giro} \quad Z \rightarrow V \rightarrow F \rightarrow R \rightarrow Z$$

$$b(A) = A \quad \text{boucle} \quad Z \rightarrow F \rightarrow Z; \quad R \rightarrow V \rightarrow R$$

El gráfico siguiente muestra las tres formas de cambio de color



**2.4.2** Construcción de una franja: Se inicia con dos cuadros excepto dos amarillos:

El tercer color Verde de la franja, se consigue haciendo los giros de los dos primeros así:  
 $G(A)cg(Z) = V$ ;

El cuarto color Azul, se consigue con  $G(Z)cg(V) = Z$  (observe la operación en la tabla)

El quinto color Fucsia, se consigue con  $G(V)cg(Z) = F$  (observe la operación en la tabla)

Continúe con el sexto, séptimo, etc. hasta completar mínimo 25, observe cuándo se repite la secuencia.



**2.4.3** Arreglo de dos franjas, se desliza la segunda franja tres cuadros a la derecha de la primera, las casas de dos pisos (vectores) se observan y para la construcción de la siguiente casa se establecen las siguientes reglas:



**2.4.4** Construcción de la casa siguiente:

Segundo piso = bucle del segundo piso agregar giro del primer piso

Primer piso = segundo piso agregar bucle primer piso.

Observe:

segundo piso =  $b(Z)cg(A) = F$

Primer piso =  $Zcb(A) = Z$

**2.4.5** Arreglo con matrices: convenciones importantes: bucle =  $b$ ; Giro =  $G$ ; giro =  $g$  y la matriz

generadora  $\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & b \end{bmatrix}$

Formando la ecuación  $\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  Compruebe para las 24 casas alineadas como ejercicio.

**2.4.6** Ejercicio: Deslizar la segunda franja una sola posición a la derecha de la primera y analizarla con la regla para construir la siguiente casa.

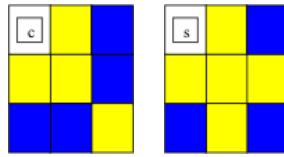
### 3. Manejando tres franjas

#### 3.1. Tres franjas - usando dos colores Amarillo (A), Azul (Z)

**3.1.1** Regla (c)  $AcA = A$ ;  $AcZ = ZcA = Z$ ;  $ZcZ = A$

Regla (s)  $AsZ = A$ ;  $ZsZ = Z$





**3.1.2** Arreglo de una franja: Se inicia con tres cuadros no amarillos ( $AAA$ ) operando de acuerdo a la regla 1.1 el color del primer cuadro agregado al color del segundo cuadro, resulta el color del cuarto cuadro.

Construya una franja con tantos cuadros como sea posible



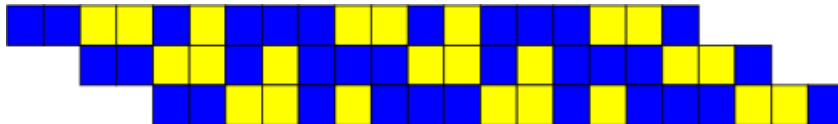
**3.1.3** Arreglo de tres franjas: Ubique tres franjas de forma paralela deslizando la segunda dos cuadros a la derecha de la primera y la tercera franja deslizarla dos cuadros a la derecha de la segunda.

**3.1.4** Reglas para construir la siguiente casa: el arreglo de estas franjas origina casas de tres pisos (vectores), recordando que la casa siguiente se construye a partir de los pisos de la casa presente mediante la siguiente regla:

Tercer piso: tercer piso “c” primer piso.

Segundo piso: tercer piso “c” segundo piso “c” primer piso.

Primer piso: tercer piso “c” segundo piso.



**3.1.5** Arreglo con matrices: también se puede construir la casa siguiente haciendo operaciones con matrices así:

$$1x + 0y + 1z = X$$

$$1x + 1y + 1z = Y$$

$$1x + 1y + 0z = Z$$

Construya la ecuación con matrices

La casa que deseamos construir  $[X, Y, Z]$  a partir de una casa presente  $[x, y, z]$ , se logra con la operación de la matriz generadora mediante combinación lineal de los pisos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la casa presente.

Parejas logradas  $V = \{(Z, A, Z), (A, A, Z), (Z, Z, A), (Z, A, A), (Z, Z, Z), (A, Z, A), (A, Z, Z), (A, A, A)\}$  para un rápido manejo se pueden codificar los colores  $A = 0$  y  $Z = 1$  de manera que resulta el conjunto como:  $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$

**3.1.6** Ejercicio: Deslice la segunda y tercera franja uno, dos o tres cuadros a la derecha (izquierda) y determine la regla establecida para construir las casas (vectores).

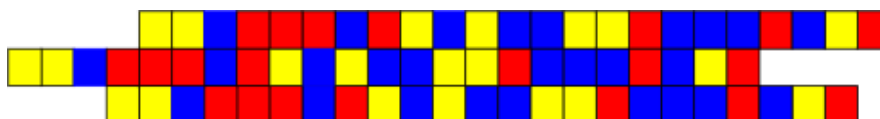
### 3.2. Tres franjas - usando tres colores: Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R)

**3.2.1** Las reglas de cambio “c” y “swap”, son iguales a las aplicadas para dos franjas.

**3.2.2** El arreglo de una franja se inicia con tres colores excepto tres amarillos AAA, es decir para tres colores el “swap” primer color “c” el segundo color y “swap” el tercer color es el cuarto color.



**3.2.3** Las tres franjas se deslizan como se observa en el gráfico.



**3.2.4** La casa siguiente: piso 3 = piso 2.

$$\begin{aligned}\text{Piso 2} &= \text{piso 2 "c"} (\text{"swap" piso 1}) \\ \text{Piso 1} &= \text{piso 3 "c"} (\text{"swap" piso 2}) \text{ "c" piso 1}\end{aligned}$$

**3.2.5** Construya la ecuación que representa la construcción de las casas.

**3.2.6** Ejercicio: Deslice las franjas presentándolas de otra forma y construya las reglas para la construcción de las casas.

### 3.3. Tres franjas - usando cuatro colores: Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R), Verde (V)

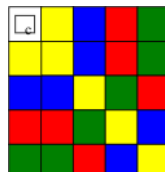
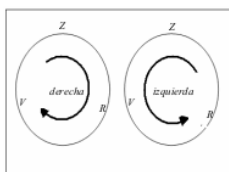
**3.3.1** Las reglas de “c” y “swap” son las mismas a las usadas en manejo de dos franjas.

**3.3.2** El arreglo de una franja se inicia con tres colores excepto AAA. El cuarto color se logra haciendo “giro a la derecha” a la suma de los primeros tres colores, debe hacer una franja larga para lograr 63 cuadros antes de iniciar la repetición.

A Z R Z V A V A Z V V R V V V Z R A Z Z A A R V R Z A Z A R Z Z V Z Z Z R V A R R  
A A V Z V R A R A V R R Z R R R V Z A V V A A Z R Z V A V

**3.3.3** Arreglo de las tres franjas:

A	Z	R	Z	V	A	V	A	Z	V	V	R	V	V	V	Z	R	A	Z	Z	A	A	R	V	R	Z	A	Z	A	R	Z	Z	V	Z	Z	Z	R	V	A	R	R	A	A
	A	Z	R	Z	V	A	V	A	Z	V	V	R	V	V	V	Z	R	A	Z	Z	A	A	R	V	R	Z	A	Z	A	R	Z	Z	V	Z	Z	Z	R	V	A	R	R	A
			A	Z	R	Z	V	A	V	A	Z	V	V	R	V	V	V	Z	R	A	Z	Z	A	A	R	V	R	Z	A	Z	A	R	Z	Z	V	Z	Z	Z	R	V	A	R



**3.3.4** Reglas para construir la siguiente casa:

$$\begin{bmatrix} i & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{ Traduzca las reglas y construya las ecuaciones.}$$

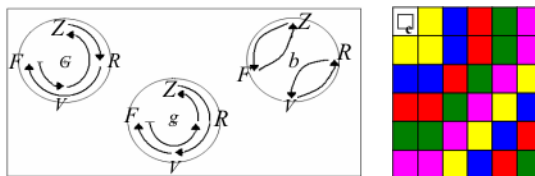
**3.3.5** Ejercicio: Construya una franja con cuatro colores usando el giro a izquierda.

**3.4. Tres franjas - usando cinco colores u objetos. Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R), Verde (V), Fucsia (F) Lunes (L), Martes (M), Miércoles (C), Jueves (J), Viernes (V)**

**3.4.1** Las reglas “c” y “swap” son las mismas a las usadas con dos franjas.

**3.4.2** Para la construcción de una franja inicie con tres letras menos todas amarillas AAA, para cualquier trío de colores  $G(1)$  “c” $2 = 4$ ,  $G(\text{primer color})$  “c”segundo color = cuarto color, Iniciemos la franja para una lista visible de elementos:

AAZAZRZF AZVZARRRZZAVRVVRFVVZFRZ...



**3.4.3** Arreglo de las tres franjas

A	A	Z	A	Z	R	Z	F	A	Z	V	Z	A	R	R	R	Z	Z	A	V	R	V	V	R	F	V	V	Z	F	R	Z	A	A	R	A	R	F	R	V	A	R	Z	R
	A	A	Z	A	Z	R	Z	F	A	Z	V	Z	A	R	R	R	Z	Z	A	V	R	V	V	R	F	V	V	Z	F	R	Z	A	A	R	A	R	F	R	V	A	R	Z
			A	A	Z	A	Z	R	Z	F	A	Z	V	Z	A	R	R	R	Z	Z	A	V	R	V	V	R	F	V	V	Z	F	R	Z	A	A	R	A	R	F	R	V	A

**3.4.4** Reglas para la construcción de la siguiente casa:

Piso 3 =  $G(3)$  “c” piso 2 “c” piso 1

Piso 2 = piso 3

Piso 1 = piso 3 “c”  $g(1)$

**3.4.5** Compruebe estas reglas con la operación entre matrices.

## 4. Manejando cuatro franjas

**4.1. Cuatro franjas - usando dos colores Amarillo (A), Azul (Z)**

**4.1.1** Regla “c”, “s”. Las mismas que se manejan con dos franjas.

**4.1.2** Arreglo de una franja. Iniciar con cuatro colores menos con todas amarillas AAAA.

En cualquier posición el quinto cuadro es el resultado de combinar “c” los dos primeros cuadros. AZZZZAAAZAAZZAZA... continuar hasta re iniciar el ciclo.

**4.1.3** Arreglo con cuatro franjas.

A	Z	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A	Z	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A	Z	
		A	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A	Z	Z	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A
			A	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A	Z	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	A
					A	Z	Z	Z	Z	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	Z	Z	A	A	Z	A	A	Z	A	Z	Z

**4.1.4** Regla para construir la casa siguiente:

Cuarto piso = tercer piso “c”segundo piso

Tercer piso = Cuarto piso “c”segundo piso “c”primer piso.

Segundo piso = Tercer piso.

Primer piso = Cuarto piso “c”Segundo piso.

**4.1.5** Arreglo con matrices.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix}$$

$$0x + y + z + 0w = X$$

$$x + 0y + z + w = Y$$

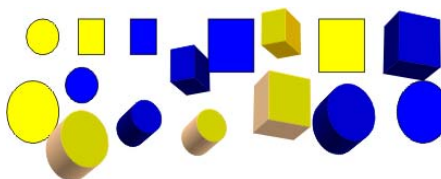
$$0x + y + 0z + w = Z$$

$$x + 0y + z + 0w = W$$

**4.1.6** Elabore un arreglo de una franja con dos colores y establezca un arreglo con cuatro franjas deslizándolas una o dos posiciones diferentes a las anteriores.

## 4.2. Manejo de las cuatro franjas con bloques lógicos.

**4.2.1** Elección de bloques. En la construcción de las cuatro franjas se puede utilizar los bloques lógicos, en este caso del conjunto de 48 bloques de Dienes se toma un subconjunto de bloques lógicos, (cuadrados o círculos) que no son rojos obteniendo la siguiente colección de bloques:

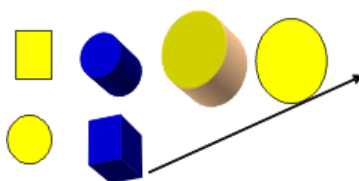


Cuadrados y círculos, no rojos

**4.2.2.** Alinear bloques. Con estos bloques se puede hacer un arreglo para formar una sucesión finita haciendo lo siguiente:

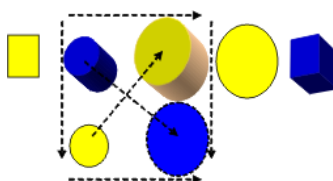
Se ordenan cuatro bloques, por ejemplo: {cuadrado delgado pequeño amarillo; círculo grueso pequeño azul; círculo grueso grande amarillo; círculo delgado grande amarillo} alineados de izquierda a derecha formando una fila; debajo ésta fila y en la primera línea ubicamos el círculo delgado pequeño amarillo; que llamaremos “comodín”.

**4.2.3.** Relación cruzada. observamos detenidamente que bloque podría ir en la segunda línea para que tenga una relación lógica en todas las direcciones (horizontal, vertical, diagonal), vemos

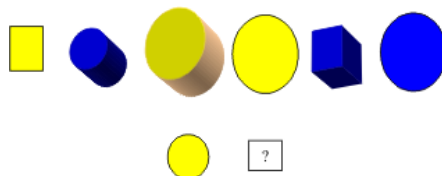


que se asocia el cuadrado grueso pequeño azul, este tiene una relación lógica con las otras tres fichas que forman el cuadrado a la izquierda.

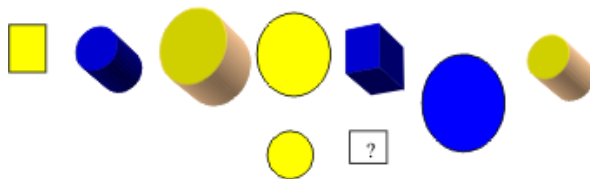
**4.2.5.** Pasa a la fila. Este bloque será el quinto elemento de la primera fila, y acto seguido correr a la derecha el “comodín”; analizar el tercer bloque de la primera fila para ubicar un bloque que se asocie con la línea anterior, vemos que se asocia el círculo delgado grande azul, compruébelo.



**4.2.6.** Este debe formar el sexto bloque de la fila de arriba; luego se mueve nuevamente el “comodín”, una posición a la derecha.



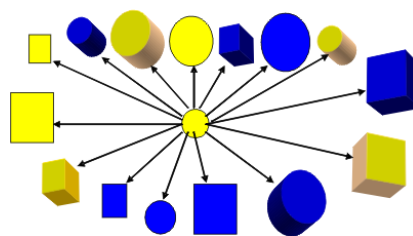
**4.2.7.** Sigue la sucesión. Se analiza con el bloque que se asocia en la siguiente línea. Debe ser el círculo grueso pequeño amarillo; porqué? el cual formará el séptimo bloque en la primera línea, moviendo luego a la derecha el “comodín”.



**4.2.8.** Cuál será el octavo bloque de la fila?. Continuar en la misma forma hasta agotar las 15 fichas, luego se observará que la siguiente ficha es precisamente la primera de la fila, esto es se forma un ciclo con las fichas que intervienen, manejada por el “comodín”, en éste caso el círculo, delgado pequeño amarillo.

Puede iniciar al azar con cuatro bloques diferentes y un módulo cualquiera, es posible que se encuentre un ciclo menor es decir que no se agoten las fichas; puede ser un juego interesante y parte de una estructura matemática igualmente importante.

Examinando el ciclo vemos como los cuatro atributos tamaños, grosor, el color y la forma cambian alrededor del ciclo.



Ciclo construido por una relación del círculo delgado pequeño amarillo “comodín”

**4.2.9.** Ejercicios: Selecciona con el mismo conjunto de fichas y determine la serie así: beginitemize  
Con 2 fichas azules en línea y otra ficha azul como comodín. Con 3 fichas azules en línea y cualquier ficha como comodín. Con 4 fichas en línea al azar y otra ficha como comodín. enditemize

Recuerde que siempre debe trabajar con una ficha única de comparación que debe mover.

**4.2.10.** Estableciendo siglas solamente para reducir espacios así:

(gra=grande, peq=pequeño, gru= grueso, del= delgado, azu= azul, ama= amarillo, cua=cuadrado, cir= circulo).

Observando el ciclo en la secuencia construida arriba con los bloques lógicos y partiendo del bloque del extremo superior izquierdo, cuadrado delgado pequeño amarillo, y en sentido de giro de las manecillas del reloj hacemos la lista de todas las 15 fichas por atributos así:

Por tamaño: peq, peq, gra, gra, peq, gra, peq, gra, gra, gra, gra, peq, peq, peq, gra.

Por grosor: del, gru, gru, del, gru, del, gru, gru, gru, gru, del, del, del, gru, del.

Por color: ama, azu, ama, ama, azu, azu, ama, azu, ama, azu, azu, azu, azu, ama, ama.

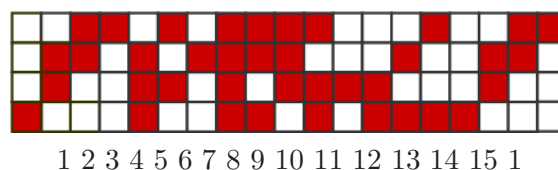
Por forma: cua, cir, cir, cir, cua, cir, cir, cua, cua, cir, cua, cir, cua, cua, cua.

**4.2.11.** Para una mayor facilidad y tomando como referencia el “comodín” como (0, 0, 0, 0)

Se puede codificar,  $gra(1)$ ,  $peq(0)$ ,  $gru(1)$ ,  $del(0)$ ,  $azu(1)$ ,  $ama(0)$ ,  $cua(1)$ ,  $cir(0)$ . Podemos construir cuatro franjas de manera numérica así:

0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

**4.2.12.** Como se están manejando solo el 0 y el 1, se asocian cuatro franjas de dos colores semejanado torres o casas con cuatro pisos el color rojo(1) y el blanco(0), veamos como lo representamos.



**4.2.13.** Cada columna construida le llamaremos casa de cuatro pisos, para construir las quince casas en sucesión podemos establecer reglas que operan dos colores de la siguiente forma:

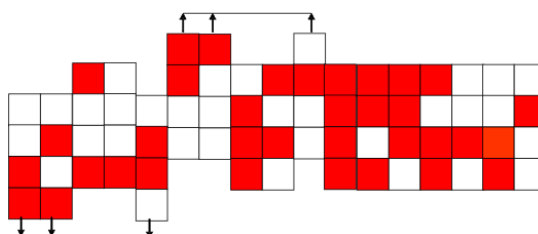
- a) combinando dos cuadros del mismo color es un cuadro de color blanco.
- b) combinando dos cuadros de diferente color resulta un cuadro de color rojo.

La regla de construcción de la siguiente casa partiendo de la primera es la siguiente:

- a) para colocar el color del primer piso de la siguiente casa se suman los colores de los pisos anteriores excepto el del primer piso.
- b) para colocar el color del segundo piso de la siguiente casa se suman los colores de todos los pisos de la primera casa.
- c) el color del tercer piso de la siguiente casa es el resultado de los colores de la casa anterior excepto el piso segundo.
- d) El color del cuarto piso de la siguiente casa es el color del tercer piso de la casa anterior.

**4.2.14.** Ejercicio: Continúe construyendo la tercera casa y así sucesivamente hasta completar la sucesión de 15 casas.

**4.2.15** Combinando los respectivos pisos de la primera y segunda casa resulta la quinta casa



En el arreglo de arriba se han seleccionado tres casas en donde las dos primeras se asocian con la quinta casa mediante la regla:

La suma horizontal de los pisos correspondientes de las dos primeras casas sea igual al correspondiente piso de la quinta casa.

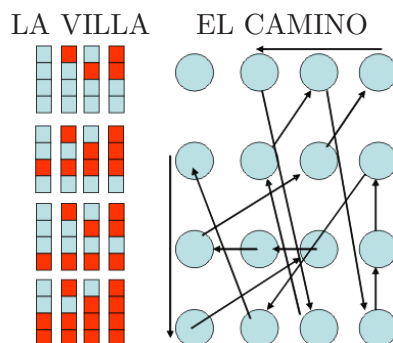
Se pueden agrupar cinco conjuntos de tres casas que cumplen esta regla, selecciónelas.

**4.2.16.** Con estas casas se construye una villa que satisface muchas reglas importantes para esto se arreglan las casas en un orden especial de cuatro por cuatro donde la casa de solo blancos se ubica en la parte superior izquierda, y siguen casas en un orden binario hasta terminar con la casa de solo color.

Se traza un camino siguiendo casa por casa dentro de la villa como lo señala el diagrama de flechas que se han trazado, compruébelo.

Aplicando la regla de la construcción de las quince casas se puede ver que un picnic se transforma en otro picnic siguiendo el camino alrededor de la villa, y regresara al primer picnic siguiendo el orden como lo señala la flecha

El primer picnic son las casas que tienen el cuarto piso blanco. (viendo las casas por la parte de arriba) mueva una posición cada casa y vera su resultado.

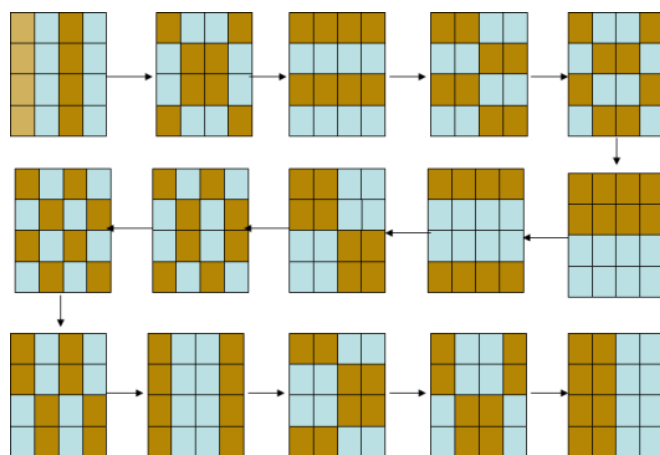


ARREGLO DE OCHO CASAS QUE CUMPLEN UNA PROPIEDAD DETERMINADA

LAS SIGUIENTES SON LAS CARACTERISTICAS QUE SE OBSERVAN EN LA VILLA, CAMINE POR ELLA Y OBSERVE LAS INTERESANTES FIGURAS QUE SE FORMAN AGRADABLES A LA VISTA.

CUARTO PISO BLANCO	$1+2+3+4$ PISOS = BLANCO	2 PISO = BLANCO
2 PISO = 3 PISO	$2+3+4$ PISOS = BLANCO	1 PISO = BLANCO
1 PISO = 2 PISO	1 PISO = 3 PISO	$1+2+4$ PISOS = BLANCO
2 PISO = 4 PISO	1 PISO = 4 PISO	3 PISO = 4 PISO
$1+2+3$ PISOS = BLANCO	$1+3+4$ PISOS = BLANCO	3 PISO = BLANCO

Identifique las casas que cumplen una condición y viaje con cada casa por la villa simultáneamente de acuerdo a las flechas



HAY MUCHOS CAMINOS QUE SE PUEDEN CONSTRUIR, SOLAMENTE MANEJE UN ARREGLO DE LOS BLOQUES LÓGICOS Y CONSTRUYA LAS REGLAS DE LOS ATRIBUTOS, VERA TRAZOS AGRADABLES.



### 4.3. Cuatro franjas - usando tres colores amarillo (A), azul (Z), rojo (R).

**4.3.1** Reglas “c”y “s” Son las mismas que las manejadas con dos franjas y tres colores.

**4.3.2** Construcción de una franja. Iniciar con cuatro colores menos AAAA.

En cualquier posición el quinto cuadro se logra con la operación de los dos primeros colores, (vea la tabla) la sucesión se repite después de 80 cuadros.

Ejemplo ZARZZRARARRRRZZZARRZRZAAAZAAZRZZAARZARAZRRZA...

**4.3.3** Construcción de las cuatro franjas y deslizarlas.

Z	A	R	Z	Z	R	A	R	A	R	R	R	R	Z	Z	Z	A	R	R	Z	R	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	R	Z	A
	Z	A	R	Z	Z	R	A	R	A	R	R	R	Z	Z	Z	A	R	R	Z	R	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	R	Z	Z
		Z	A	R	Z	Z	R	A	R	A	R	R	R	Z	Z	Z	A	R	R	Z	R	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	R	Z
			Z	A	R	Z	Z	R	A	R	A	R	R	R	Z	Z	Z	A	R	R	Z	R	Z	A	A	A	Z	A	A	Z	R

**4.3.4** Ejercicio: Termine la construcción de las reglas para armar los pisos de las casas siguientes.

Primer piso = segundo piso anterior Segundo piso = Tercer piso = Cuarto piso =

**4.3.5** Ejercicio: Haga un arreglo de la ecuación matricial correspondiente.

**4.3.6** Ejercicio: Construya arreglos interesantes con las franjas deslizándolas hacia uno de los dos lados, asegurándose de no dejar una columna de solo color amarillo.

### 4.4. Cuatro franjas - usando cuatro colores: Amarillo (A), Azul (Z), Rojo (R), Verde (V)

**4.4.1** Las reglas “c”y “s”, son las mismas que las manejadas en dos franjas y cuatro colores.

**4.4.2** Ejercicio: Establezca una regla para construir una franja teniendo cuidado de no poner inicialmente todos los cuatro colores amarillos.

**4.4.3** Ejercicio: Haga el arreglo de las cuatro franjas deslizándolas a la izquierda o a la derecha una o dos cuadros con relación a la franja anterior.

**4.4.4** Ejercicio: Establezca las reglas para la construcción de las casas.

**4.4.5** Ejercicio: Construya las ecuaciones que establecen dichas reglas.

## 5. Manejando cinco franjas

### 5.1. Cincofranjas - usando dos colores Amarillo (A), Azul (Z)

**5.1.1** Las reglas básicas son las establecidas para dos franjas, dos colores.

**5.1.2** Construcción de una franja, se hace una línea de cinco cuadros que no sean todos amarillos. El sexto cuadro de cualquier posición es el resultado de agregar los cuatro primeros colores con la regla “a”

AAAAZAZZAZAZAAZZZZAZZZZZAAZAAZZ

**5.1.3** Arreglo de las franjas. Deslizando las cinco franjas como se muestra abajo se tienen casas de 5 pisos.

A	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	A	A	Z	Z	A	Z	Z	Z	Z	Z	A	A	Z	A	A	Z	Z		
	A	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	A	A	Z	Z	A	Z	Z	Z	Z	Z	A	A	Z	A	A	Z	Z	
		A	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	A	A	Z	Z	A	Z	Z	Z	Z	A	A	Z	A	A	Z	Z	
				A	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	Z	A	Z	A	A	Z	A	A	Z	A
			A	A	A	A	Z	A	Z	Z	A	Z	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z	Z	A	Z	Z	A	A	Z	A	A	Z	

**5.1.4** Compruebe las ecuaciones con las casas construidas.

$$\begin{aligned}
 0x + y + z + u + v &= X \\
 x + 0y + 0z + 0u + 0v &= Y \\
 0x + y + 0z + 0u + 0v &= Z \\
 0x + 0y + 0z + 0u + v &= U \\
 0x + 0y + z + 0u + 0v &= V
 \end{aligned}$$

## 5.2. Cinco franjas - usando tres - cuatro - cinco colores

**5.2.1.** Las reglas básicas son las presentadas para tres, cuatro y cinco colores en el trabajo de dos franjas.

**5.2.2.** Ejercicio: Construya franjas estableciendo reglas para tres, cuatro y cinco colores, teniendo en cuenta de no iniciar con cinco cuadros amarillos.

**5.2.3.** Ejercicio: Haga los arreglos correspondientes de las cinco franjas deslizándolas a la izquierda o derecha de acuerdo a la franja anterior; vale la pena construirlos.

En todas las actividades anteriores con las franjas se usaron dos, tres, cuatro y cinco colores, cada vez antes de iniciar la construcción se tomaba como referencia una tabla de colores que a la postre no es más que un arreglo que forma un grupo abeliano que podemos asociarlo con la adición en la estructura numérica trabajada para los números reales.

En todas las actividades excepto en las de dos franjas, se construyó una relación “swap” o de “cambio” que se puede asociar con la operación de multiplicación en matemáticas, se ve que para el conjunto de colores menos el amarillo, la regla “s” forma un grupo abeliano, además de cumplir con la propiedad distributiva, en otras palabras se está formando un campo, donde sus elementos los podemos llamar escalares.

Al construir las casas con las franjas establecemos unos vectores y además cumple las condiciones de espacio vectorial.

En nuestra actividad se han trabajado intuitivamente campos con dos, tres, cuatro y cinco elementos asociados con igual número de colores y las dimensiones de los espacios vectoriales asociados.

Deseamos ampliar estos conceptos interesantes mas adelante organizando trabajos del mismo estilo.

## Bibliografía

- [1] Zoltan, Paul Dienes. Franjas matemáticas, 2004, [www.zoltandienes.com](http://www.zoltandienes.com) EDUTECA, Matemática interactiva.